

No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <http://www.ibo.org/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse <http://www.ibo.org/fr/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <http://www.ibo.org/es/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

**Matemáticas**  
**Nivel Superior**  
**Prueba 3 – Estadística y probabilidad**

Jueves 21 de noviembre de 2019 (tarde)

1 hora

---

**Instrucciones para los alumnos**

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 7]

Peter, el director de un centro educativo, cree que existe una relación entre la nota de sus alumnos en un examen de matemáticas,  $X$ , y el tiempo que tardan en correr 500 m,  $Y$  segundos. Se recogen los siguientes datos pareados.

Nota en el examen de matemáticas $X$	70	75	76	66	60	61
Tiempo que tarda en correr 500m $Y$	100	105	95	109	89	101

Se puede suponer que  $(X, Y)$  sigue una distribución normal bidimensional, cuyo coeficiente de correlación momento-producto es  $\rho$ .

- (a) (i) Indique hipótesis  $H_0$  y  $H_1$  apropiadas para poner a prueba la afirmación de Peter, utilizando un contraste de dos colas.
- (ii) Realice un contraste apropiado a un nivel de significación del 5%. Haciendo referencia al valor del parámetro  $\rho$ , indique cuál es su conclusión respecto a la afirmación de Peter. [5]
- (b) Peter utiliza una recta de regresión de  $y$  sobre  $x$  dada por  $y = 0,248x + 83,0$  y calcula que un alumno que saque una nota de 73 en el examen de matemáticas tendrá una marca de 101 segundos en la carrera. Comente la validez de este cálculo. [2]

2. [Puntuación máxima: 15]

- (a) Se toman tres variables aleatorias independientes  $X_1, X_2, X_3$  de una distribución de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Se proponen tres estimadores para  $\mu$ .

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}, T_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{3}, T_3 = \frac{X_1 + 2X_2}{3}$$

- (i) Muestre que uno de estos tres estimadores para  $\mu$  es sesgado; muestre que los otros dos son estimadores sin sesgo.
- (ii) De entre los dos estimadores sin sesgo, determine, de manera razonada, cuál es el más eficiente. [9]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

(b) Considere la variable aleatoria  $Y$ , que sigue una distribución binomial negativa  $Y \sim \text{NB}(4, p)$ . Tomamos una muestra aleatoria de esta distribución, y a la media la denominamos  $\bar{Y}$ .

(i) Halle  $E(\bar{Y})$ .

(ii) A partir de lo anterior, sugiera un estimador sin sesgo de  $\frac{1}{p}$  en función de  $\bar{Y}$ . [2]

(c) La variable aleatoria discreta  $W$  tiene la distribución de probabilidad que se muestra en la siguiente tabla.

$w$	1	2
$P(W = w)$	0,5	0,5

(i) Calcule  $E(W)$ .

(ii) Calcule  $E\left(\frac{1}{W}\right)$ .

(iii) A partir de lo anterior, explique por qué el estimador de  $\frac{1}{p}$  que dio en (b)(ii) no sugiere directamente un estimador sin sesgo de  $p$ . [4]

**3. [Puntuación máxima: 14]**

(a) Indique el teorema central del límite, aplicado a una muestra aleatoria de tamaño  $n$  que se toma de una distribución de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . [2]

La variable aleatoria  $X$  tiene una distribución de media  $\mu$  y varianza 4. Tomamos una muestra aleatoria de tamaño 100 de esta distribución de  $X$ .

(b) Jack toma una muestra aleatoria de tamaño 100 y calcula que  $\bar{x} = 60,2$ . Halle un intervalo de confianza aproximado del 90% para  $\mu$ . [2]

(c) Josie toma una muestra aleatoria de tamaño 100 distinta para contrastar la hipótesis nula de que  $\mu = 60$ , frente a la hipótesis alternativa de que  $\mu > 60$ , a un nivel del 5%.

(i) Halle la región crítica para el contraste de Josie. Dé la respuesta redondeando a dos lugares decimales.

(ii) Escriba la probabilidad de que Josie cometa un error de tipo I.

(iii) Sabiendo que la probabilidad de que Josie cometa un error de tipo II es igual a 0,25, halle el valor de  $\mu$ . Dé la respuesta redondeando a tres cifras significativas. [10]

## 4. [Puntuación máxima: 14]

Considere la variable aleatoria  $X$ , que sigue una distribución binomial negativa  $X \sim \text{NB}(r, p)$ . La función generatriz de probabilidad para  $X$  es

$$G_X(t) = \frac{p^r t^r}{(1-qt)^r}, \text{ donde } q = 1 - p.$$

- (a) Utilice esta función generatriz de probabilidad para hallar y simplificar  $E(X)$ . [5]

Considere otra variable aleatoria independiente  $Y$ , donde  $Y \sim \text{NB}(s, p)$ .  
Sea  $W = X + Y$ .

- (b) (i) Halle la función generatriz de probabilidad para  $W$ .  
(ii) A partir de lo anterior, identifique qué distribución sigue  $W$  e indique sus parámetros.  
(iii) Sabiendo que  $r = 2$  y  $s = 3$ , calcule  $P(X = 3 | W = 7)$ . [9]
-